הרצאה 11, 11.6.26

הערה 1: ע"פ הגדרה

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

ולכן

$$T_f(x_0) = f(x_0).$$

פולינום טור הטיילור תמיד שווה ל פונקציה בנק' x_0.

הערה 2: תהי $x \in \mathbb{R}$. אזי

$$T_f(x) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_N(x)} = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$$

ולכן $f(x) = T_f(x)$ אם"מ קיים הגבול

$\lim_{N\to\infty} T_N(x)$ ובנוסף $f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$.

נשים ☺ כי $f(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x)$ אמ"מ

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = \lim_{N\to\infty}\left(f(x) - T_N(x)\right) = f(x) - \lim_{N\to\infty} T_N(x) = 0$$

הערה 3: משפט טיילור נותר נכון גם כאשר $x < x_0$. במקרה זה, $x < c < x_0$ (במקום $x_0 < c < x$). שאר הנתונים זהים.

משפט 1: לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

הוכחה: נזכור כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס בהחלט לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן מתנאי הכרחי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad ☺$$

משפט ב: לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

הוכחה: נראה כבר שטור הטיילור של $f(x)=\sin x$ סביב $x_0=0$ הוא

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

אם נוכיח שלכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=T_f(x)$ ולפי הערה ב, מספיק להראות ש- לכל $x\in\mathbb{R}$ $\lim_{N\to\infty}|R_N(x)|=0$. אם $x=0$, אז מהערה 1 סיימנו. יהי $x\neq 0$. ממשפט השארית של טיילור קיימת c בין x ל- 0 כלומר $0<c<x$ או $x<c<0$ כך ש-

$$0\le |R_N(x)| = \frac{|f^{(N+1)}(c)|}{(N+1)!}|x|^{N+1} \le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\Downarrow$$

$$0$$

☺

משפט 3: לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

הוכחה: באותו האופן.

מסקנה 1: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונק' הניתנת פ פעמים

ותהי $x_0\in\mathbb{R}$. נניח שקיים $K>0$ כך שלכל

$n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$|f^{(n)}(x)|\le K$. אזי $f(x)=T_f(x)$

תרגיל 1: נב"ט בפונק' המשפיעת ע"י

$f(x)=\sin x+\cos(2.5x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$

הוכיחו אי המרכז את הטענה הבאה:

$f(x)=T_f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ כאשר $T_f(x)$ טור

הטיילור של f סביב $x_0=\frac{\pi}{4}$.

פתרון: נכון. המשיות ברור כי $f(x_0)=T_f(x_0)$.

יהי $x\neq x_0$. נוכיח כי $\lim_{N\to\infty}|R_N(x)|=0$ ונסיים.

ממשפט השארית של טיילור קיימת c בין

x ל- x_0 כך ש-

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

נסמן $\alpha = 2.5$. שים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left[\cos(\alpha x)\right]^{(n)}\right| \leq \alpha^n .$$ לכן

$|\cos(\alpha x)| \leq 1$

$|\sin(\alpha x)| \leq 1$

$$0 \leq |R_N(x)| = \frac{|f^{(N+1)}(c)|}{(N+1)!}|(x-x_0)|^{N+1} \leq \frac{1+\alpha^{N+1}}{(N+1)!}|x-x_0|^{N+1}$$

$$\leq \frac{2\cdot\alpha^{N+1}}{(N+1)!}|x-x_0|^{N+1} = 2\cdot\underbrace{\frac{|\alpha(x-x_0)|^{N+1}}{(N+1)!}}_{\to 0}$$

ולכן מסנדוויץ', $\lim_{N\to\infty}|R_N(x)| = 0$

הגדרה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$. תהי $\phi\neq D\subseteq\mathbb{R}^n$

ותהי $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^m$.

(i) **הגרף** של $\vec{F}$ מוגדר להיות

$$G_{\vec{F}}=\left\{\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{F}(\vec{x})\end{pmatrix}:\ \vec{x}\in D\right\}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$$

(ii) **התמונה** של $\vec{F}$ מוגדרת להיות

$$\operatorname{Im}\vec{F}=\{\vec{F}(\vec{x}):\ \vec{x}\in D\}\subseteq\mathbb{R}^m$$

הגדרה: תהי $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ ותהי $\vec{F}$ פונק' המוגדרת

בסביבה מנוקבת של $\vec{x}_0$. יהי $\vec{L}\in\mathbb{R}^m$. נאמר כי

$\vec{L}$ הוא **גבול** של $\vec{F}$ ב- $\vec{x}_0$, ונסמן

$\vec{L}=\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{F}(\vec{x})$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך

שלכל $0<\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$ מתקיים $\|\vec{F}(\vec{x})-\vec{L}\|<\varepsilon$

כאשר

$\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.

הערה 4: נשים ☺ שגי אותה ההגדרה שנתנו בעמ' 1. מכיוון שאוש ה-Δ תקף ל-$\|\cdot\|$ ולכן גם אוש ה-∇ תקף כי הוא נבנה מאוש ה-Δ) אבל כל המשפטים שלמדנו שנבנים מהגדרת הגבול ומאוש ה-Δ או ה-∇ תקפים עם אותה הוכחה. (אוש $\pm, \cdot, \div$ יחידות הגבול וכדומה)

הערה 5: בהינתן $\phi \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^m$ אבל לכל $\vec{x} \in D$, $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ ולכן נוכל לכתוב

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

כאשר $F_1, \dots, F_m : D \to \mathbb{R}$. לכן כל פונק' מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$ היא בעצם m פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$

הגדרה: $\vec{F}$ תקרא רציפה ב-$\vec{x}_0$ אם

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0).$$

דוגמאות:

(1) נגדיר בפונק' $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

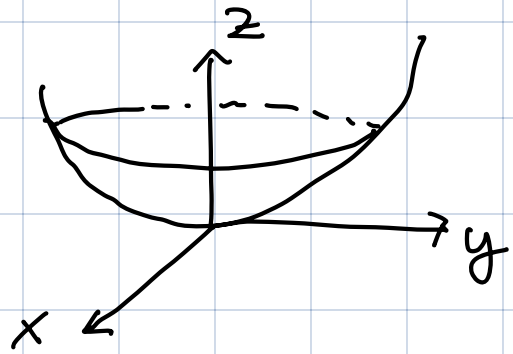
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ לכל $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+y^2$

נשים ♡ כי:

(i) $F\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5$

(ii) F רציפה מאוד.

(iii) $\lim\limits_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}} F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=10$



(2) נגדיר בפונק' $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

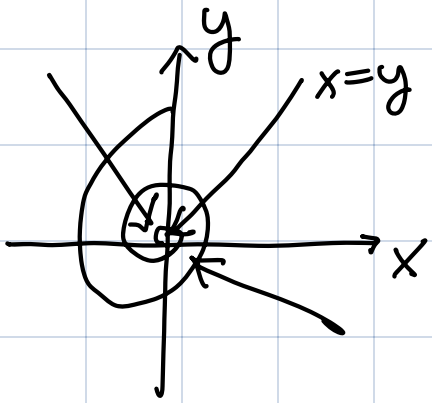
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ לכל
$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בכל נק' $(x,y)\neq(0,0)$ F רציפה מאוד.

$$\lim_{\substack{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}\\ x=y}} F\binom{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}\\ y=-x}} F\binom{x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

אכן $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} F\binom{x}{y}$ לא קיים

(לא רציפה ב- $\binom{0}{0}$) אכן אין $a\in\mathbb{R}$

שעבורו F רציפה.